1ères S1-S2-S3 janvier 2017

Composition de mathématiques

(durée 3h - calculatrice autorisée)

Exercice 1 : (5,5 points)

Un supermarché a réalisé une enquête pour étudier la fidélité de ses clients. L'étude a montré qu'au cours du premiers mois de l'enquête, on comptabilisait 9000 clients, et que, d'un mois sur l'autre, 60% des clients du mois précédent restaient fidèles à ce supermarché et que 3000 nouveaux clients se rajoutaient. On note u_n le nombre de clients venus au cours du n-ième mois de l'enquête. Ainsi, $u_1 = 9000$.

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

3. On considère la suite v_n définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$v_n = u_n - 7500$$

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4. Exprimer v_n en fonction de n, puis, exprimer u_n en fonction de n

5. En estimant que l'évolution du nombre de clients reste celle dévoilée par l'enquête , prévoir le nombre de clients de ce supermarché après 3 ans passés.

6. Compléter l'algorithme sur l'**Annexe 1** permettant de répondre à la question précédente.

Exercice 2 : (3 points)

Un javelot est lancé par une athlète. Au bout de t secondes, la hauteur atteinte en mètre par ce javelot est donnée par l'expression :

$h(t) = -5t^2+10t+2$

1) Interpréter h(0).
2) Déterminer la hauteur maximale en mètre atteinte par le javelot.
3) Déterminer la durée de vol du javelot.

Exercice 3 : (4 points)

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Soient les points A(-1 ; 0), B(3 ; 2) et C(10 ; 7). Le point K est le milieu du segment [AB].

1) Placer ces points sur le graphique donné sur l'**Annexe 2**.
2) Calculer les coordonnées du point K.
3) Soit d_1 la droite d'équation : $x-2y+1=0$.
   Montrer que A et B sont des points de d_1.
4) Déterminer l'équation de la droite d_2 passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.
5) Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
6) Soit k un réel et D le point de coordonnées (-12 ; k). Déterminer la valeur de k pour que la droite (CD) soit parallèle à la droite d_1.

Exercice 4 : (4 points)

Une société de service a en charge l'entretien d'un parc de distributeurs automatiques. Elle a observé durant une année le nombre d'interventions (réglages, pannes ou révision obligatoire) réalisées sur chacun des distributeurs. Le tableau ci-dessous rassemble les résultats obtenus

Nombre d'interventions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de machines	10	12	17	44	78	94	83	49	36	16

1) **a.** Déterminer, en justifiant, la médiane de la série.

b. Déterminer, en justifiant, le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3.

c. Représenter alors, le diagramme en boîte de cette série.

2) **a.** Calculer la moyenne de la série.

b. A l'aide du mode statistique de la calculatrice, déterminer l'écart type de la série (arrondir à 0,01 près)

c. Dans une autre société, la moyenne annuelle des interventions est 6,2 et l'écart-type est 1,20. Comparer ces deux sociétés au niveau de la répartition de leurs interventions.

Exercice 5 : (2,5 points)

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$, on note P sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer la forme canonique de f.
En déduire les coordonnées du sommet S de P.

2) En déduire le tableau de variation de f.

3) On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = 9x + 49$. Etablir le tableau de signe de la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$.

4) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$

Exercice 6 : (3 points + 1 point de bonus)

On appelle f la fonction définie sur $]-\frac{2}{3}\,; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{2+3x}$ et C sa représentation graphique, donnée en **Annexe 3**.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$

1) En utilisant la courbe C et la droite D d'équation $y = x$, construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

2) Donner une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

3) On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$, et on pose $v_n = \frac{2}{u_n} + 1$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 3$

b. En déduire la nature de la suite (v_n) et indiquer ses éléments caractéristiques.

c. Donner l'expression de v_n en fonction de n.

d. Déterminer l'expression de u_n en fonction de v_n puis en déduire celle de u_n en fonction de n.

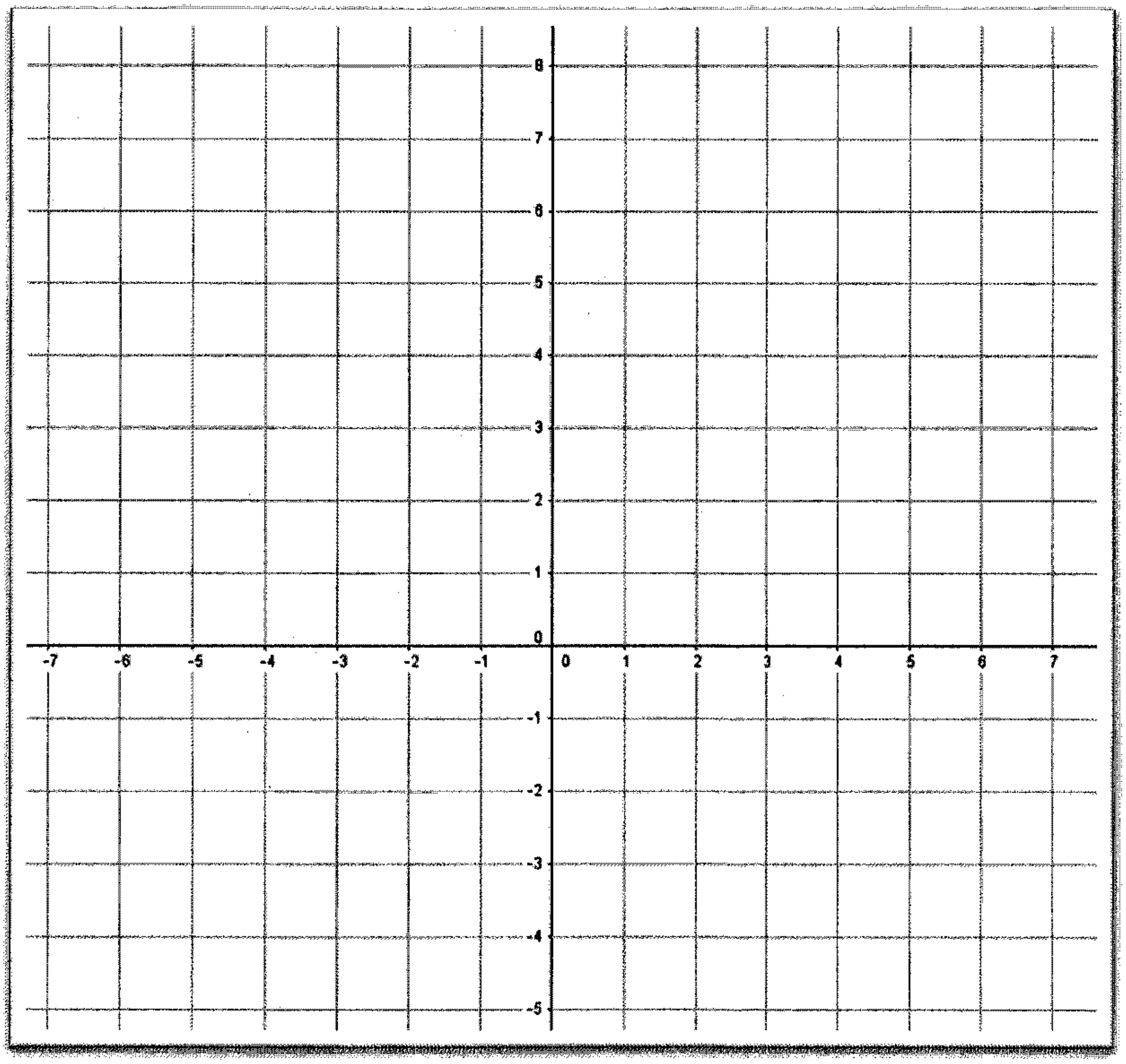
BONUS : Démontrer la conjecture établie à la question 2)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Annexe 1 (exercice 1)

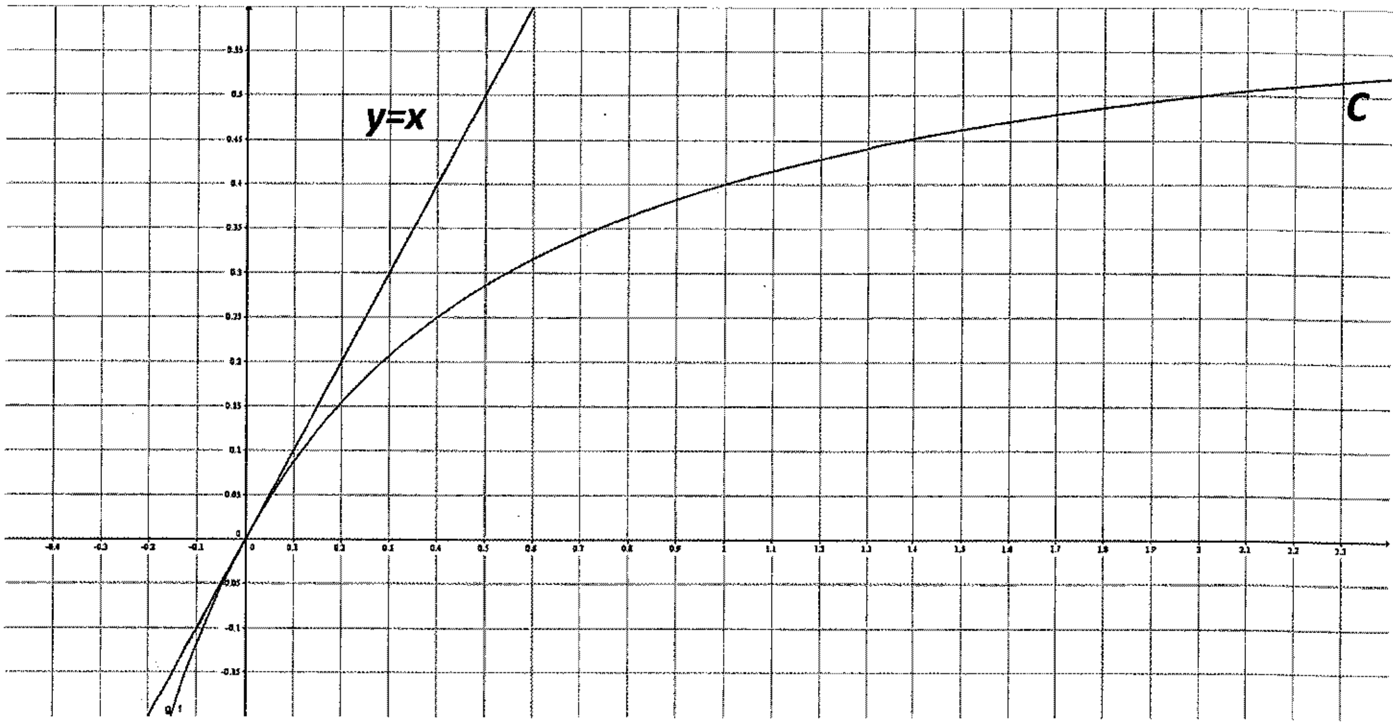
Variables	N est un nombre entier non nul
	U est un nombre réel
Entrées	Affecter à N la valeur 1
	Affecter à U la valeur 9000
Traitement	Tant que …………………………….
	Affecter à N la valeur ………
	Affecter à U la valeur ………
	Fin Tant que
Sortie	Afficher ………

Annexe 2 (exercice 3)



Nom : **Prénom :** **Classe :**

Annexe 3 (exercice 6)



$1^{\text{ères}}$ S1-S2-S3 janvier 2017

Correction de la composition de mathématiques

Exercice 1 :

1. $u_2 = \dfrac{60}{100}u_1 + 3000 = \dfrac{60}{100} \times 9000 + 3000 = 8400$

$u_3 = \dfrac{60}{100}u_2 + 3000 = \dfrac{60}{100} \times 8400 + 3000 = 8040$

2. $u_{n+1} = \dfrac{60}{100}u_n + 3000 = 0{,}6u_n + 3000$

$u_2 - u_1 = 600$ et $u_3 - u_2 = 360$.

La différence entre les termes consécutifs n'est pas constante donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{14}{15}$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{67}{70}$.

Le rapport entre les termes consécutifs n'est pas constant donc (u_n) n'est pas géométrique.

3. $v_{n+1} = u_{n+1} - 7500 = 0{,}6\,u_n + 3000 - 7500 = 0{,}6\,u_n - 4500 = 0{,}6\,(u_n - 7500) = 0{,}6\,v_n$.

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_1 = u_1 - 7500 = 1500$.

4. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 1500 \times 0{,}6^{n-1}$

$v_n = u_n - 7500$ donc $u_n = v_n + 7500$ et $u_n = 1500 \times 0{,}6^{n-1} + 7500$

5. 3 ans = 36 mois $u_{36} = 1500 \times 0{,}6^{35} + 7500 \approx 7500$.

Le nombre de clients de ce supermarché après 3 ans est 7500.

6. Algorithme :

```
Variables      N est un nombre entier non nul
               U est un nombre réel
Entrées        Affecter à N la valeur 1
               Affecter à U la valeur 9000
Traitement     Tant que N ≤ 35
                    Affecter à N la valeur N+1
                    Affecter à U la valeur 0,6U + 3000
               Fin Tant que
Sortie         Afficher U
```

Exercice 2 :

1) $h(0) = 2$. $h(0)$ est la hauteur à laquelle le javelot est lancé par l'athlète, c'est-à-dire 2 m.

2) $h(t) = -5t^2 + 10t + 2$ est de la forme $at^2 + bt + c$ donc une fonction polynôme du second degré avec :

$a = -5$ $b = 10$ et $c = 2$. $a < 0$ donc h admet un maximum en $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{10}{-10} = 1$.

Ce maximum est $\beta = h(\alpha) = h(1) = -5 + 10 + 2 = 7$.

La hauteur maximale du javelot est 7 m et elle est atteinte au bout d'1 seconde.

3) Le vol du javelot s'arrête quand il touche le sol, c'est-à-dire quand $h(t) = 0$.

On résout cette équation : $-5t^2 + 10t + 2 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 140$ $\Delta > 0$ donc l'équation admet 2 solutions :

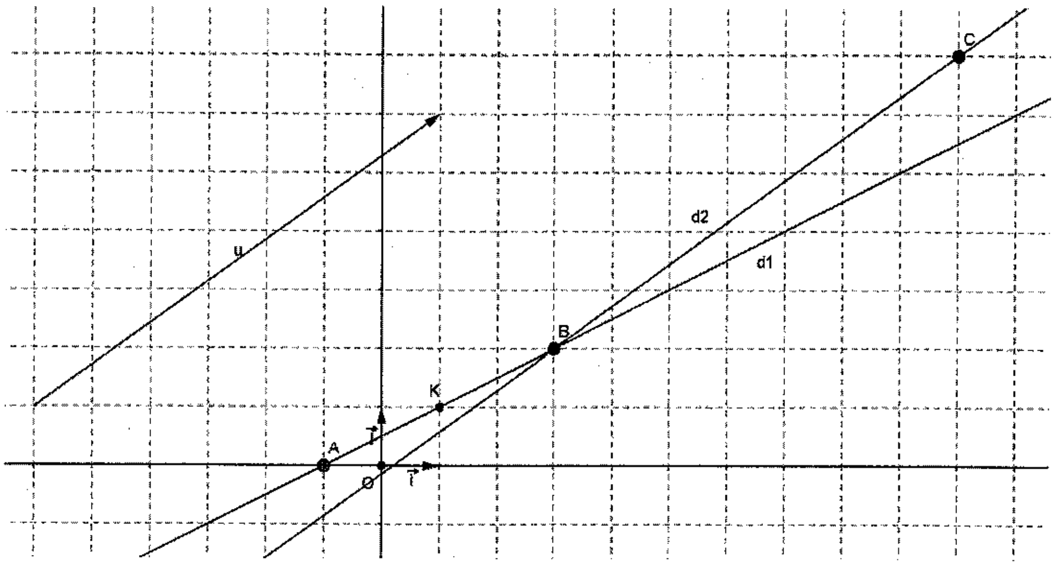
$t_1 = \dfrac{-10-\sqrt{140}}{-10} = \dfrac{5+\sqrt{35}}{5} \approx 2{,}18$ ou $t_2 = \dfrac{-10+\sqrt{140}}{-10} = \dfrac{5-\sqrt{35}}{5} \approx -0{,}18$

Seule la valeur positive est possible donc le javelot a une durée de vol de 2,18 secondes.

Exercice 3 :

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soient les points A(-1 ; 0), B(3 ; 2) et C(10 ; 7).
Le point K est le milieu du segment [AB].

1) Graphique :



2) K milieu de [AB] donc $x_K = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $y_K = \dfrac{0+2}{2} = 1$. K(1 ; 1)

3) $-1-2\times 0+1 = -1+1 = 0$ les coordonnées de A vérifient l'équation de d_1 donc $A \in d_1$.

$3-2\times 2+1 = 3-4+1 = 0$ les coordonnées de B vérifient l'équation de d_1 donc $B \in d_1$.

4) La droite d_2 admet $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur donc son équation cartésienne est de la forme :

$$5x-7y+c=0$$

C(10 ; 7) appartient à d_2 donc ses coordonnées vérifient l'équation de d_2 :

$$5\times 10-7\times 7+c=0$$
$$50-49+c=0$$
$$c=-1$$

donc l'équation cartésienne de d_2 est : $5x-7y-1=0$

5) d_1 admet $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur et d_2 admet $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

$2\times 5-1\times 7 = 10-7 = 3 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

6) La droite (CD) est parallèle à la droite d_1 donc les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-12-10\\k-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22\\k-7\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Ainsi : $2(k-7)-1\times(-22)=0$

$2k-14+22=0$ et $k=-4$

Exercice 4 :

1) **a.** La série contient 439 valeurs. $\frac{439+1}{2}=220$, la médiane de la série est donc la 220$^{\text{ème}}$ valeur.

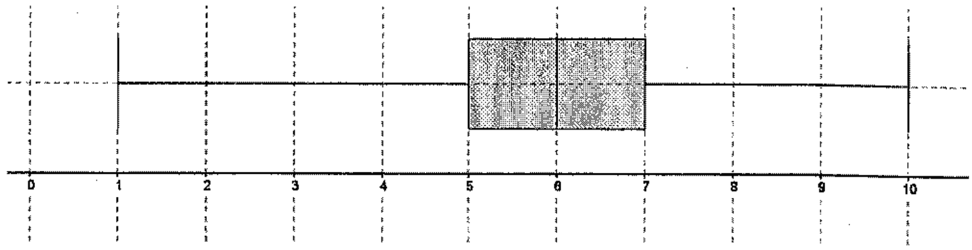
Nombre d'interventions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de machines	10	12	17	44	78	94	83	49	36	16
Effectifs cumulés croissants	10	22	39	83	161	255	338	387	423	439

A l'aide de la ligne des effectifs cumulées, on peut lire : Me $=6$.

b. $\frac{439}{4}=109{,}75$, Q_1 est la 110$^{\text{ème}}$ valeur. On lit $Q_1 = 5$.

$\frac{439\times 3}{4}=329{,}25$, Q_3 est la 330$^{\text{ème}}$ valeur. On lit $Q_3 = 7$.

c. Diagramme en boîte :



2) **a.** Moyenne de la série : $\bar{x} = \frac{1\times 10+2\times 12+\ldots+10\times 16}{439}\approx 6{,}1$.

b. A l'aide de la calculatrice, l'écart type est $\sigma \approx 1{,}97$.

c. Dans la deuxième société, la moyenne annuelle est sensiblement la même mais l'écart-type est plus faible, cet indicateur montre que le nombre d'interventions par distributeur est plus homogène.

Exercice 5 :

1) $f(x)=3x^2-6x+7=3(x^2-2x)+7=3(x^2-2x+1-1)+7=3\left[(x-1)^2-1\right]+7 =3(x-1)^2-3+7 =3(x-1)^2+4$

f est sous la forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a=3$, $\alpha=1$ et $\beta = 4$.

On en déduit que le sommet S a pour coordonnées $(1\ ;\ 4)$.

2) $a=3 > 0$ donc f est décroissante puis croissante :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\searrow$	4	$\nearrow$	

3) $h(x)=f(x)-g(x) = 3x^2-6x+7-(9x+49) = 3x^2-15x-42$.

$\Delta = (-15)^2-4\times 3\times(-42) = 729>0$ donc le trinôme $h(x)= 3x^2-15x-42$ admet deux racines :

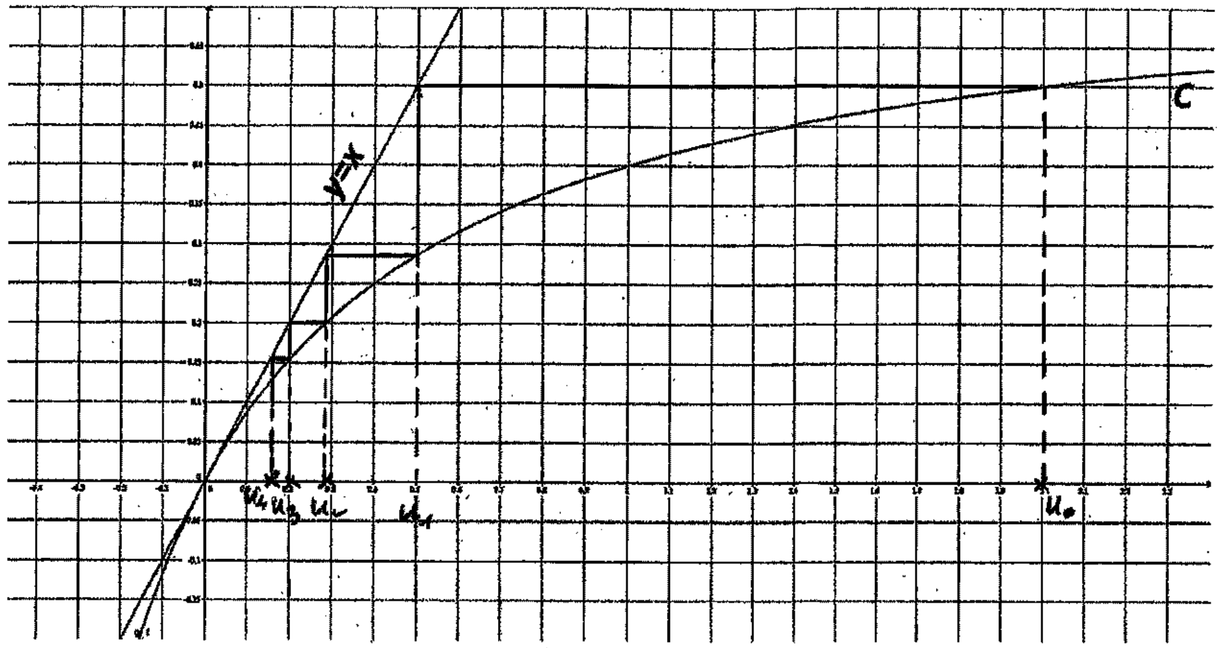
$x_1 = \frac{15-\sqrt{729}}{6}=-2$ $\quad x_2=\frac{15+\sqrt{729}}{6}=7$ et $a=3>0$ donc :

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$h(x)$		+	0	−	0	+	

4) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x) <0$ d'après le tableau ci-dessus, on en déduit que $S =]-2\ ;\ 7[$

Exercice 6 :

1)



2) La suite (u_n) semble décroissante.

3) a. $v_{n+1} = \dfrac{2}{u_{n+1}}+1 = \dfrac{2}{\dfrac{2u_n}{2+3u_n}}+1 = 2\times\dfrac{2+3u_n}{2u_n}+1 = \dfrac{2+3u_n}{u_n}+\dfrac{u_n}{u_n} = \dfrac{2+4u_n}{u_n}$

$= \dfrac{2}{u_n}+\dfrac{4u_n}{u_n} = \dfrac{2}{u_n}+4 = v_n+3$

b. Comme $v_{n+1}=v_n+3$, on en déduit qu la suite (v_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0=\dfrac{2}{u_0}+1=\dfrac{2}{2}+1=2$

c. Dans ce cas, $v_n = v_0+nr = 2+3n$

d. $v_n=\dfrac{2}{u_n}+1 \Leftrightarrow v_n-1=\dfrac{2}{u_n} \Leftrightarrow u_n=\dfrac{2}{v_n-1}$ donc $u_n=\dfrac{2}{2+3n-1}=\dfrac{2}{3n+1}$

BONUS : Démontrons que la suite (u_n) est décroissante :

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{2}{3(n+1)+1}-\dfrac{2}{3n+1}=\dfrac{2}{3n+4}-\dfrac{2}{3n+1}=\dfrac{2(3n+1)-2(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)}=$
$\dfrac{6n+2-6n-8}{(3n+4)(3n+1)}=\dfrac{-6}{(3n+4)(3n+1)}$

n est un entier naturel donc $(3n+4)(3n+1)>0$ quel que soit n

De plus $-6<0$ donc $\dfrac{-6}{(3n+4)(3n+1)}<0$ pour tout n de IN.

donc $u_{n+1}-u_n<0$ pour tout n de IN donc (u_n) est bien décroissante.